

Muvofiqlik Kriteriyasi (c^2 Kriteriya)

To'rxonov Islombek Farxod o'g'li, Yuldashev Begzod Egambergan o'g'li
 Urganch davlat universiteti "Matematik tahlil" kafedrasida o'qituvchisi

Abstract: Maqolada Bernulli sxemasi va Katta sonlar qonuni masalalar, Berri-Essen tengsizligi, Normal taqsimot qonunidan foydalanilgan.

Key points: Bernulli sxemasi, Katta sonlar qonuni, Berri-Essen tengsizligi.

Bu maqolada biz Bernulli sxemasi va Katta sonlar qonuni Berri-Essen tengsizligi, Normal taqsimot qonunidan ma'lumotlarga ega bo'lishimiz kerak.

Ixtiyoriy x_1, \dots, x_n Bernulli tasodifiy miqdorlari berilgan bo'lsin va bunda $P(x_i = 1) = p$, $P(x_i = 0) = 1 - p$, $1 \leq i \leq n$. Bu masala $x = x_1, \dots, x_n$ kuzatishlar natijalaridan foydalangan holda $H_0: p = p_0$ gipotezani tekshirish masalasini ko'rib chiqadi. Bundan ko'rinadiki, p parametrning haqiqiy qiymati $0 < p_0 < 1$ oraliqda bo'ladi.

Bizga ma'lumki, $S_n(x) = x_1 + \dots + x_n$ tenglik o'rinli. Bundan ko'rinadiki

$$c_n^2(x) = \frac{(S_n(x) - np_0)^2}{np_0(1 - p_0)}$$

Faraz qilaylik, H_0 gipoteza uchun $x^3 = 0$ bo'lsin, u holda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi.

$$P\{x_n^2(x) \leq x\} \approx \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2py}} e^{-y/2} dy, \quad n \gg \frac{1}{p}$$

jadvalga ko'ra $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2py}} e^{-y/2} dy$ funksiya c^2 tasodifiy miqdorning funksiyasi bo'ladi. (

$F(x)$ funksiya erkinlik darajalari 0 va 1 bo'lgan Gauss tasodifiy miqdori kvadratidan tuzilgan taqsimot funksiyasi).

$H_0: p = p_0$ gipoteza c^2 kriteriya shartlarini bajarishi uchun quyidagi shartlar o'rinli bo'lishi kerak.

Ixtiyoriy $e > 0$ son shunday tanlab olamizki, bunda e eng kichik bo'lsin va tajriba o'tkazganimizda ehtimolligi eng kichik bo'lsin (aytaylik, agar $e = 0,01$ bo'lsa qoidaga asosan yuzta tajribadan bittasi muvaffaqiyatli deb hisoblaymiz va bu holat faqat bir marotaba yuz berishi mumkin).

¹ [[2] qarang. 110-117-betlarda Matematik statistic elementlari ko'rsatilgan]

Tanlangan $e > 0$ son uchun shunday $l(e)$ soni topiladiki, bunda

$$\int_0^{l(e)} \frac{1}{\sqrt{2py}} e^{-y/2} dy = e$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$H_0 : p = p_0$ gipotezani (c^2 kriteriyaga ko'ra) quyidagicha tekshiramiz: $x = x_1, \dots, x_n$ kuzatishlar bo'yicha hisoblangan $l_n^2(x)$ ning qiymati uchun $c_n^2(x)$ $\leq l(e)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa H_0 gipoteza bo'ladi, aks holda esa H_0 gipoteza tashkil qilmaydi.

- a) Katta sonlar qonuni va c^2 kriteriyadan foydalanib, H_0 gipoteza uchun $H_0 : p = p_0$ tenglik o'rinli bo'lishini ko'rsating
- b) ²Berri-Essen tengsizligidan foydalanib quyidagini isbotlang

$$\sup_x P \left\{ c_n^2(x) \leq x \right\} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2py}} e^{-y/2} dy \leq \frac{2}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

- c) Ixtiyoriy $l_n(e)$ son uchun shunday l son mavjud va u $P \left\{ c_n^2(x) > l_n(e) \right\} \leq e$ tenglikni qanoatlantiradi. $l_n(e)$ ga va $l(e)$ ga yaqinlashish tezligini va $= c_n^2(x) \leq l_n(e)$?
 $= c_n^2(x) \leq l(e)$? almashtirish xatoligini toping.

Yechish: Quyidagi formuladan foydalanamiz

$$P \left(c^2(x) \leq x \right) = P \left(\sqrt{x} \leq \frac{S_n(x) - ES_n(x)}{\sqrt{DS_n(x)}} \leq \sqrt{x} \right) = P \left(-\sqrt{x} < \frac{S_n(x) - ES_n(x)}{\sqrt{DS_n(x)}} \leq \sqrt{x} \right) + P \left(\frac{S_n(x) - ES_n(x)}{\sqrt{DS_n(x)}} = \sqrt{x} \right) \tag{7}$$

formulaga ko'ra ketma-ketlikning 2-hadi nolga intiladi.

Har bir $x > 0$ uchun ³Muavr-Laplas teoremasiga ko'ra 1-hadi uchun quyidagi tenglik o'rinli

$$\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-t^2/2} dt = 2 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-t^2/2} dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2py}} e^{-y/2} dy.$$

$y = t^2$ almashtirish bajaramiz

- a) H_0 gipoteza noto'g'ri bo'lsin, ya'ni $p = p_1 \neq p_0$ tenglik o'rinli. U holda formulaga asosan

$$"e > 0 \text{ uchun } n > n_3(e) = \frac{\ln(2/e)}{2e^2} \text{ ehtimollik } 1 - e \text{ ga teng va}$$

² [[6] qarang. 66-113-betlarda ko'rsatilgan]

³ [[1] 77-83-betlarni qarang Muavr-Laplas teoremasi keltirilgan]

$$\left| \frac{S_n(x)}{n} - p_0 \right|^3 \left| p_1 - p_0 \right| - \left| \frac{S_n(x)}{n} - p_1 \right| > \left| p_1 - p_0 \right| - e$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar $e < |p_1 - p_0|/2$ bo'lsa, quyidagi formula o'rinli

$$c_n^2(x) \leq \frac{n(p_1 - p_0)}{4p_0(1 - p_0)}.$$

Bundan kelib chiqadi, agar $e < |p_1 - p_0|/2$

$$n > \max \left\{ n_3(e), \frac{4l p_0(1 - p_0)}{(p_1 - p_0)^2} \right\}$$

tengliklar o'rinli bo'lsa, $c_n^2(x)$ eng katta qiymatga erishadi va bunda $l(e) = 1 - e$ bo'ladi. Bu holda H_0 gipoteza bajarilmasligi mumkin.

b) $x = t^2$ almashtirish bajarib, quyidagiga ega bo'lamiz

$$\sup_x \left| P \left\{ c_n^2(x) \leq x \right\} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2py}} e^{-y/2} dy \right| \leq \sup_{t^2=0} |F_n(t) - F(t)| + \sup_{t \neq 0} |F_n(t) - F(t)|,$$

$F_n(t)$ va $F(t)$ tanlab olib uning qiymati

$$\frac{2(p_0^2 + (1 - p_0)^2)}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}.$$

$p_0^2 + (1 - p_0)^2 \leq 1$, bo'lishi bu formulani isbotlaydi.

c) $l_*(e, n)$ va $l^*(e, n)$ ning qiymatini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\int_{l^*(e, n)}^{l(e)} \frac{1}{\sqrt{2py}} e^{-y/2} dy = \frac{2}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$

$$\int_{l(e)}^{l^*(e, n)} \frac{1}{\sqrt{2py}} e^{-y/2} dy = \frac{2}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}.$$

Birinchi tengsizlikni isbotlasak, ikkinchi tengsizlikni ham huddi shunday isbotlanadi.

$$l^*(e, n) \leq l_n(e) \leq l^*(e, n).$$

$$|l^*(e, n) - l(e)| \leq \frac{2C^*(e)}{\sqrt{n}} + O(n^{-1/2}),$$

$$|l(e) - l^*(e, n)| \leq \frac{2C^*(e)}{\sqrt{n}} + O(n^{-1/2}).$$

$$\int_0^{l^*(e, n)} \frac{1}{\sqrt{2py}} e^{-y/2} dy \leq \frac{1}{\sqrt{2pl(e)}}$$

$$\int_0^{l^*(e, n)} e^{-y/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2pl(e)}} \left[2e^{-l(e)/2} - e^{-l^*(e, n)/2} \right] = \frac{2e^{-l(e)/2}}{\sqrt{2pl(e)}} \left[1 - e^{\frac{l(e) - l^*(e, n)}{2}} \right].$$

Bu tenglikni logarifmlash orqali biz natijaga ega bo'lamiz.

$$e^{\frac{l(e) - l^*(e, n)}{2}} \leq 1 - \frac{C^*(e)}{\sqrt{n}}, \quad c^*(e) = \sqrt{\frac{2pl(e)}{p_0(1-p_0)}} e^{\frac{l(e)}{2}}.$$

№ 1. x binomial taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdor bo'lsin,

$$P_q \{x = k\} = C_n^k q^k (1-q)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Bu yerda n - berilgan son, q - no'malum parameter bo'lib, q bu tasodifiy kuzatuv yordamida baholanishi kerak.

$q \in (0, 1)$ kesmada quyidagicha standart baholash ishlatishimiz mumkin:

$$E_q T(x) = q$$

Bu yerda $T^q = T^q(x)$ baholashdan ko'ra quyidagi baholash effektliroq:

$$E_q (T(x) - q)^2 = \inf_{T^q} E_q (T^q(x) - q)^2.$$

Yana shuni ko'rsatingki, agar $n = 3$ bo'lsa va $q \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $\hat{T}(x) = \frac{1}{2}$, baholash $q = \frac{1}{2}$

$T(x) = \frac{x}{3}$ baholashga nisbatan kuchliroq.

$$E_q |\hat{T}(x) - q|^2 < E_q |T(x) - q|^2,$$

$$E_q \left[\frac{1}{9} - \frac{2q}{3} + q^2 \right] < E_q \left[\frac{1}{3} - \frac{2q}{3} + q^2 \right].$$

Har qanday n uchun o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

Yechish: Tasodifiy x o'zgaruvchini ixtiyoriy x_1, \dots, x_n o'zgaruvchilarning yig'indisining taqsimlanishi deb hisoblash mumkin, ya'ni bu yerda $P_q \{x_1 = 1\} = q$,

$$P_q \{x_1 = 0\} = 1 - q.$$

$$DT_n^* = \inf_{T_n} DT_n$$

$$T_n^* = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{x}{n} = T(x) \text{ va } T_n = T(x_1, \dots, x_n).$$

x_1, \dots, x_n baholar sinfi x baholar sinfiga nisbatan torroq

$$D_q T(x) = D_q T_n^* = \inf_{\frac{1}{4} \leq q \leq \frac{3}{4}} D_q T(x)$$

Endi istalgan n son uchun solishtiramiz:

$$E_q \left(\frac{1}{2} - q \right)^2 \text{ va } E_q (T(x) - q)^2$$

Bunda $q \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right)$.

$$E_q \left(\frac{1}{2} - q \right)^2 = q^2 - q + \frac{1}{4} \in \left(\frac{1}{16}, \frac{3}{16} \right)$$

$$E_q (T(x) - q)^2 = D_q T(x) = \frac{1}{n^2} D_q \sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D_q x_k = \frac{1}{n} q(1-q) \in \left(\frac{3}{16n}, \frac{4}{16n} \right).$$

Shunday qilib, $n = 3$ uchun har qanday $q \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right)$ uchun

$$E_q \left(\frac{1}{2} - q \right)^2 < E_q (T(x) - q)^2$$

$n > 3$ uchun bu to'g'ri emas.

№ 2. Ikkita korrektor A va B isbotlarni o'qish natijasida mos ravishda a va b matbaa xatolarini aniqladilar, ulardan c umumiy bo'lib chiqdi. Korrektorlar bir-biridan mustaqil ishlagan deb faraz qilib, "aniqlanmagan bosma xatolar soni haqida oqilona baho bering".

Yechish: Quyidagi statistik modelni ko'rib chiqamiz. x_1, \dots, x_{2n} $2n$ ta o'zgaruvchi uchun Bernulli taqsimotini qo'llaymiz. $\{x_{2k} = 1\}$ hodisa shuni anglatadiki A korrektor k-xatolikni payqadi, $\{x_{2k-1} = 1\}$ hodisa esa B korrektor k-xatolikni payqaganini bildiradi. Bunda, $k = 1, \dots, n$ bo'ladi. Mustaqillik tufayli har ikkala korrektorning almashtirishi ehtimoli bir xil.

Boshqa tomondan, har ikkala korrektor sezgan matn terish xatolarining nisbati $\frac{c}{n}$ ga teng.

Aniqlanmagan xatolar soni

$$n - a - b + c = \frac{ab}{c} - a - b + c.$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. Форманов Ш. Қ. Эҳтимоллар назарияси, Тошкент, “Университет”, 2014 й.
2. Абдушукуров А.А., Азларов Т.А., Джамирзаев А.А. «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан мисол ва масалалар тўплами», Тошкент, «Университет», 2003 й.
3. Боровков А.А. Теория вероятностей. URSS, Москва, 2009.
4. А.В. Прохоров, В.Г. Ушаков, Н.Г. Ушаков. Задачи по теории вероятностей. М. «Наука», 1986.
5. Г.И.Ивченко, Ю.И. Медведов, А.В. Чистяков, *Задачи с решениями по математической статистике*. Москва, «Дрофа», 2007.
6. Вуколов Э.А. Основы статистического анализа практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов STATISTICA и EXCEL Москва, «Форум», 2008.
7. В. Б. ЯКОВЛЕВ. Статистика. расчеты в MICROSOFT EXCEL Москва «Колосс» 2005.