

TASODIFIY YURISH. VAYRON BO‘LISH EHTIMOLI VA TANGALAR ULOQTIRISH O‘YIN PAYTIDAGI O‘RTACHA DAVOMIYLIK.

Sobirov Usmon Matyakubovich

Urganch davlat universiteti “Matematik tahlil” kafedrasida katta o‘qituvchisi

Olimboyev To‘lqin G‘ayrat o‘g‘li

Urganch davlat universiteti “Matematik tahlil” kafedrasida o‘qituvchisi

Iskandarov Sarvar Baltabayevich

Urganch davlat universiteti “Matematik tahlil” kafedrasida o‘qituvchisi

Аннотация:

Ushbu maqolada Bernulli sxemasida qo‘llaniladigan masalalarni ko‘rib chiqdik. Tasodifiy yurishlar vayron bo‘lish ehtimoli tangalarni o‘yin paytidagi o‘rtacha davomiyligi. Bernulli tasodifiy miqdorlar x_1, x_2, \dots uchun, balki anchagina umumiy tabiatga ega bo‘lgan miqdorlar uchun xam o‘rinlidir. Shu ma‘noda Bernulli sxemasi oddiy model bo‘lib, misolda ko‘plab ehtimoliy qoniniyatlar keltirilgan va yetarlicha umumiy modellar uchun xam xosdir.

Kalit so‘zlar: tasodifiy miqdor, sxemasi, model

O‘z o‘zidan tushunarliki, o‘tkazilayotgan tajribaning natijalari (elementar hodisalar) eng kamida 2 ta bo‘lishi kerak. Tajriba bilan bog‘liq elementar hodisalar soni 2 ga teng bo‘lgan holni Bernulli sxemasi deb atashadi. Bu sxema uchun har bir tajriba natijasida biror A hodisaning ro‘y berishi yoki ro‘y bermasligi kuzatiladi, deb tushunish mumkin. Agar A hodisa ro‘y bersa, shartli ravishda “yutuq”, ro‘y bermasa “yutqiziq” deb hisoblab, “yutuq” qa 1 ni, “yutqiziq” qa 0 mos qo‘ygan bo‘laylik. Bu holda bosh to‘plam 2 ta $\{0, 1\}$ elementlardan iborat deb, undan qaytariladigan sxema bo‘yicha hajmi n ga teng bo‘lgan tanlanma olsak, bu tanlanmalar soni 2^n ga teng bo‘ladi. Endi p ni $[0, 1]$ oralig‘idagi ixtiyoriy son deb hisoblab, hamma tanlanmalar

$$W = \{x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i = 1 \text{ yoki } 0\}$$

to‘plamida $p(x)$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz: agar x tanlanmada $k(x)$ ta 1 bo‘lsa,

$$p(x) = p^{k(x)}(1 - p)^{n - k(x)}$$

Aniqlangan $p(W)$ funksiya ehtimollik taqsimotini berishi uchun

$$P(W) = \sum_{x \in W} p(x) = 1$$

ekanligini isbot etish kerak bo'ladi.

Oson tushunish mumkinki, k ta 1 larni n joyga C_n^k usul bilan joylashtirish mumkin. Demak, k ta elementlari 1 ga teng bo'lgan tanlanmalar soni ham C_n^k ga teng, ya'ni

$$P(W) = \sum_{x \in W} p(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1$$

¹Bernulli sxemasi uchun keltirilgan oxirgi teoremlarning qiymati $\{S_n = k\}$ и $\{A < S_n \leq B\}$. ehtimollarni hisoblash uchun qulay formulalarni berish bilan chegaralanib bu teoremlarning roli shundan iboratki, ular universal xarakterga ega, ya'ni nafaqat ikki qiymatga ega

bo'lgan erkli Bernulli tasodifiy miqdorlar x_1, x_2, \dots uchun, balki anchagina umumiy tabiatga ega bo'lgan miqdorlar uchun xam o'rinlidir. Shu ma'noda Bernulli sxemasi oddiy model bo'lib, misolda ko'plab ehtimoliy qonuniyatlar keltirilgan va yetarlicha umumiy modellar uchun xam xosdir. Shu va keyingi paragraflarda bazida kutilmagan xarakterga ega bo'lgan qator ehtimoliy qonuniyatlar ko'rib chiqiladi. Ko'p xulosalar umumiy ko'rinishdagi sarsonliklar uchun o'rinli bo'lsa ham, barcha ko'rilganlar Bernulli sxemasi orqali tavsiflangan sarsonliklar(chalg'ishlar) uchun qaytadan olib boriladi.

Ushbu bo'limda biz simmetrik tasodifiy yurushni ko'rib chiqamiz.

1. Quyidagi formulalar to'g'ri ekanligini ko'rsating:

$$ES_{t_n^x}^x + (p - q)Et_n^x$$

$$E \left(\frac{dS_{t_n^x}}{dt_n^x} - t_n^x E x_1 \frac{d^2}{dt_n^x} \right) = D x_1 \times E J_n^x + x^2$$

Yechim. Ta'rifga ko'ra $t_k^x = \min \{0 \leq l \leq k : S_l^x = A \text{ va } B\}$. bizda mavjud

$$t_n^x = \min \{0 \leq l \leq n : S_l^x = A \text{ yoki } B\} = \min \{0 \leq l \leq n : S_l^x = A - x \text{ yoki } B - x\}$$

Oxirgi ifodani t_n^x bilan belgilaymiz; agar $A - x < S_l < B - x$ har qanday l uchun, $0 \leq l \leq n$, keyin biz $t_n^x = n$ qo'yamiz. Keyin t_n^x chegaralar bilan nol qoldiradigan tasodifiy yurish uchun to'xtash momenti

$$A - x \leq 0 \text{ va } B - x \leq 0$$

¹ [1] А. Н. Ширяев. Вероятность–1. Вероятность: В 2-х кн. – 4-е изд., переработ. и доп.–М.:МЦНМО, 2007.

[3] Боровков А.А. Теория вероятностей, Москва, «Эдиториал-УРСС», 1999г.

² [1] А. Н. Ширяев. Вероятность–1. Вероятность: В 2-х кн. – 4-е изд., переработ. и доп.–М.:МЦНМО, 2007.

[6] А.В. Прохоров, В.Г. Ушаков, Н.Г. Ушаков. Задачи по теории вероятностей. М. «Наука», 1986.

$S_{t_0} = (p - q)t^n$ formula tufayli bizda mavjud.

$$ES_{t_n} = (p - q)Et_n$$

ta'rif tufayli $S_{t_n}^x$ va g'alaba $t_n' = t_n^x$ bizda bor.

$$ES_{t_n^x}^x = E(x + S_{t_n^x}^x) = x + ES_{t_n^x}^x = x + (p - q)Et_n^x = x + (p - q)Et_n^x$$

xuddi shunday

$$E(S_{t_n^x}^x - t_n^x Ex_1)^2 = E(S_{t_n^x}^x - t_n^x Ex_1)^2 = x^2 + 2xE(S_{t_n^x}^x - t_n^x Ex_1) + E(S_{t_n^x}^x - t_n^x Ex_1)^2.$$

Masalalarning birinchi ifodasi tufayli ikkinchi had nolga teng va (34) formulaga ko'ra biz

$$E(S_{t_n^x}^x - t_n^x Ex_1)^2 = Dx_1 Et_n^x = Dx_1 Et_n^x$$

2. $A < B$ bo'lganda $a(x), b(x)$ va $m(x)$ qiymatlari nimaga moyilligi haqidagi savolni o'rganing.

Yechim. p, q, A, B va x (biz bu masalani yechishda quyidagi formulalardan

$$b(x) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^A}{(q/p)^B - (q/p)^A} \tag{1*}$$

$$b(x) = \frac{(q/p)^B - (q/p)^x}{(q/p)^B - (q/p)^A}, \quad A \leq x \leq B. \tag{1**}$$

va

$$m(x) = \frac{1}{p - q} (pb(x) + Aa(x) - x) \tag{2*}$$

foydalanamiz). $a(x), b(x)$ va $m(x)$ uchun ifodalardan foydalanib va $0 < y < 1$ uchun

$\lim_{A \rightarrow -\infty} y^A = \infty$ ekanligi va $y > 1$ uchun $\lim_{A \rightarrow -\infty} y^A = 0$, deb olamiz.

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} a(x) = \lim_{A \rightarrow -\infty} \begin{cases} \frac{(q/p)^B - (q/p)^x}{(q/p)^B - (q/p)^A}, p \neq q \\ \frac{B - x}{B - A}, p = q \end{cases} = \begin{cases} 0, p > q \\ \frac{(q/p)^B - (q/p)^x}{(q/p)^B}, p < q \end{cases}$$

³ [1] А. Н. Ширяев. Вероятность—1. Вероятность: В 2-х кн. — 4-е изд., переработ. и доп.—М.:МЦНМО, 2007. ((1*), (1**) va (2*) formulalar)
 [8] Н. Ш. Крамер. Теория вероятностей и математическая статистика. 2-е издание. Москва, "ЮНИТИ", 2004 г.

$$\lim_{A \in \mathbb{R}^+} b(x) = \lim_{A \in \mathbb{R}^+} \begin{cases} \frac{(q/p)^x - (q/p)^A}{(q/p)^B - (q/p)^A}, p > q \\ \frac{x - A}{B - A}, p = q \\ (q/p)^{x-B}, p < q \end{cases} = \begin{cases} 1, p > q \\ (q/p)^{x-B}, p < q \end{cases}$$

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} m(x) = \lim_{A \in \mathbb{R}^+} \begin{cases} \frac{1}{p - q} (Bb(x) + Aa(x) - x), p > q \\ (B - x)(x - A), p = q \\ \frac{1}{p - q}, p < q \end{cases}$$

3. Bernulli sxemasida $p = y = \frac{1}{2}$ bo'lsin. Bu yerda ko'rsatish kerakki

$$E |S_n| : \sqrt{\frac{2}{p} n} \quad n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Yechim. Keling, $n > 0$ uchun quyidagi formulaga mos kelishiga ishonch hosil qilaylik. ("Tanaka formulasining diskret versiyasi")

$$|S_n| = \sum_{k=1}^n \text{sign}(S_{k-1}) DS_k + N_n \quad (**)$$

Bunda $S_0 = 0$, $S_k = x_1 + \dots + x_k$, $DS_k = x_k$,

$$\text{sign} x = \begin{cases} 1; x > 0 \\ 0; x = 0 \\ -1; x < 0 \end{cases}$$

va $N_n = \# \{0 \leq k \leq n - 1; S_k = 0\}$ -ularning soni $k, 0 \leq k \leq n - 1$, buning uchun $S_k = 0$. Bizda

$$|S_n| = \begin{cases} S_n, S_{n-1} = 0 \\ 1, S_{n-1} = 0 \\ -S_n, S_{n-1} \neq 0 \end{cases}$$

bor. Ya'ni $|S_n| = |S_{n-1}| + \text{sign}(S_{n-1}) DS_n + I_{\{S_{n-1}=0\}}$

$|S_1| = 1$ bo'lgani uchun, matematik induksiya usulidan foydalanib, biz kerakli tenglikni olamiz

(**) $\text{sign}(S_{k-1})$ va DS_k mustaqil $EDS_k = 0$ bo'lgani uchun (**)

Formuladan biz buni olamiz.

$$E |S_n| = EN_n = E \sum_{k=0}^{n-1} I(S_k = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} P(S_k = 0) \quad (***)$$

Bundan tashqari, $P \{S_{2k} = 0\} = 2^{-2k} C_{2k}^k$ va $P \{S_{2k-1} = 0\} = 0$, ya'ni (***) formuladann shunday xulosa chiqadi.

$$EN_n = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} 2^{-2k} C_{2k}^k$$

Bu yerda $\sum_{k=0}^{(n-1)/2} x^k R$ sonning butun qismi. Formulani (*) olish uchun Stirling formulasini qo'llash qoladi:

$$\sum_{k < n/2} 2^{-2k} C_{2k}^k : \sum_{k < n/2} \frac{1}{\sqrt{pk}} : \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dx}{\sqrt{px}} : \sqrt{\frac{2n}{p}}$$

4. Ikki o'yinchi mustaqil ravishda (har biri o'z) simmetriya tangalarni tashlaydi. n ta tasdiqdan

$$2^{-2n} \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$$

keyin ularning bir xil sonli gerbga ega bo'lish ehtimoli ekanligini ko'rsating. Bu yerda tenglikni oling.

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

Bir o'yinchining ehtimolliklar soni boshqasining ehtimolliklari soniga to'g'ri keladigan birinchi daqiqa S_n bo'lsin. (n ta otishlar amalga oshiriladi, agar ko'rsatilgan moment mavjud bo'lmasa $s_n = n + 1$). $P\{s_n = k\}$, $1 \leq k \leq n + 1$ ehtimolliklarini va $E \min(s_n, n)$ matematik taxminlarni toping.

Yechim. Agar $k = 1, 2$ raqamiga ega bo'lgan o'yinchi i-chi bosqichda gerb (yoki hash belgisi) olgan bo'lsa, $x_i^{(k)} = 1$ (yoki-1) bo'lsin. Keyin $P\{n\text{-ta otishdan keyin o'yinchilar tomonidan tashlab emblemalar soni bir xil}\}$

$$P \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} = \sum_{i=1}^n x_i^{(2)} = \sum_{j=0}^n P \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} = 2j - n = \sum_{j=0}^n 2^{-2n} (C_n^j)^2$$

va

$$P \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} = \sum_{i=1}^n x_i^{(2)} = P \sum_{i=1}^{2n} h_i = 0 = 2^{-2n} C_{2n}^n$$

bunda

$$h_1 = x_1^{(1)}, h_2 = -x_1^{(2)}, h_3 = x_2^{(1)}, h_4 = x_2^{(2)}, \dots$$

$$S_k := \sum_{i=1}^k h_i, k = 1, \dots, 2n \text{ belgilaylik. Unda}$$

$$P\{s_n = k\} = P\{S_{2k} = 0, S_{2i} \neq 0, i = 1, \dots, k-1\}, k = 1, \dots, n \quad (*)$$

G'alati qadamlarda yurish va nolga chiqq olmasligi sababli (*) simmetrik tasodifiy yurishning 2 qadamida birinchi marta nolga qaytish ehtimoli, shuning uchun

$$A_k^x = \mathop{\text{a}}_{0 \leq l \leq k} \left\{ w : t_k^x =, S_l^x = A \right\},$$

$$B_k^x = \mathop{\text{a}}_{0 \leq l \leq k} \left\{ w : t_k^x =, S_l^x = B \right\}.$$

formulaga ko'ra Bl.I.10 bizda mavjud.[[1]. 110-120 b]

$$P \{s_n = k\} = \frac{1}{2^{2k-2} 2k} C_{2k-1}^{k-1}$$

$s_n = n + 1$ bo'lganda, yurish va hech qachon nolga qaytmaydi, ya'ni

$$P \{s_n = n + 1\} = P \{S_1^{-1} = 0, \dots, S_{2n}^{-1} = 0\} = 2^{-2n} C_{2n}^n$$

$$\min(s_n, n) = \mathop{\text{a}}_{k=1}^n k \frac{1}{2^{2k-2} 2k} C_{2k-2}^{k-1} + n \times 2^{-2n} C_{2n}^n = \frac{1}{2} \mathop{\text{a}}_{k=0}^{n-1} 2^{-2k} C_{2k}^k + n \times 2^{-2n} C_{2n}^n$$

masalaning shartiga ko'ra, yozish mumkin.

$$E \min(s_n, n) = E |S_{2n}| + n \times 2^{-2n} C_{2n}^n$$

5. x_0, x_1, \dots, x_N -Bernulli cheksiz tasodifiy miqdorlar,

$$P \{x_i = 1\} = P \{x_i = -1\} = \frac{1}{2}, \quad S_n = x_1 + \dots + x_n \quad \text{va} \quad X_n = x_0 (-1)^{S_n}$$

diskret telegraf signali, $1 \leq n \leq N$ bo'lsin. Miqdorlarning o'rtacha va dispersiyasini toping X_n Shuningdek shartli taqsimotlarni toping

$$P \{X_n = 1 | x_0 = 1\}, i = \pm 1 \quad 1 \leq n \leq N$$

Yechim. Tasodifiy o'zgaruvchilar x_0 va $(-1)^{S_n}$ mustaqil va $E x_0 = 0$ bo'lgani uchun biz buni olamiz.

$$E X_n = E(x_0 (-1)^{S_n}) = E x_0 E(-1)^{S_n} = 0$$

chunki $X_n^2 = 1$, bizda mavjud.

$$D X_n = E X_n^2 - (E X_n)^2 = 1$$

e'tibor berib, $(-1)^{S_n} = (-1)^n$, shuning uchun

$$P \{X_n = 1 | x_0 = 1\} = P \{(-1)^n = 1 | x_0 = 1\} = \begin{cases} 1, n - \text{juft}, \\ 0, n - \text{toq}; \end{cases}$$

$$P \{X_n = -1 | x_0 = -1\} = P \{(-1)^n = -1 | x_0 = -1\} = \begin{cases} 0, n - \text{juft}, \\ 1, n - \text{toq}; \end{cases}$$

x_1, \dots, x_N -Bernulli bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lsin, $P \{x_i = 1\} = p$,

$$P \{x_i = -1\} = 1 - p, \quad S_i = x_1 + \dots + x_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad S_0 = 0$$

R_N - bo'lsin, ya'ni yurish orqali tashrif buyurgan turli nuqtalar soni S_0, S_1, \dots, S_n ER_N ni toping. R_N ko'rinishdagi miqdori uchun katta sonlar qonuni P ning qaysi qiymatlarida amal qilishini aniqlang.

$$P \left\{ \left| \frac{R_N}{N} - c \right| > \frac{\epsilon}{\sqrt{N}} \right\} \rightarrow 0$$

Bunda $\epsilon > 0$ va c - ba'zi doimiy

Yechim. Keling, R_N ni quyidagi shaklda tasavvur qilaylik;

$$R_N = 1 + I(S_1 = 0) + I(S_2 = 0, S_1 = 0) + \dots + I(S_N = 0, S_{N-1} = 0, \dots, S_1 = 0)$$

$$V_n^N = \sum_{k=0}^{n-1} x_{N-k}$$

deb belgilaylik, unda

$$R_N = 1 + I(V_1 = 0) + I(V_2 = 0, V_1 = 0) + \dots + I(V_N = 0, \dots, V_1 = 0)$$

ekanligi kelib chiqadi. Chunki,

$$P \{V_i = 0, \dots, V_i = 0\} = P \{S_1 = 0, \dots, S_i = 0\} \quad i = 1, \dots, N$$

buni olamiz.

$$ER_n = 1 + \sum_{k=1}^N P \{S_1 = 0, \dots, S_k = 0\}$$

E'tibor bering, S_k g'alat qadamlarda yo'qolmaydi, shuning uchun,

$$ER_N = 1 + \sum_{k=1}^N P \{S_1 = 0, \dots, S_k = 0\}$$

⁴Simmetrik tasodifiy yurish uchun 1.5.8 va 1.9.3 muammolari tufayli bizda mavjud

$$ER_N = 1 + \sum_{k=1}^N 2^{-2k} C_{2k}^k : \sqrt{\frac{2N}{\pi}}$$

$$\frac{R_N}{N} \rightarrow P \{S_n = 0, n \rightarrow \infty\}$$

6. x_1, \dots, x_N - bir xil taqsimlangan tasodifiy o'zgaruvchilar bo'lsin. (Bernulli shart emas.)

$$S_0 = 0, S_i = x_1 + \dots + x_i, \quad i = 1, \dots, N$$

$$N_n = \sum_{k=1}^n I(S_k > 0)$$

Bunda, S_0, S_1, \dots, S_n qatordagi muusbat hadlar soni. Quyidagi natija haqiqiy ekanligini ko'rsating. (Sporre-Anderson)

⁴ Вероятность_В_2кн_Кн_1_Ширяев_2007_552с

$$P \{N_n = k\} = P \{N_k = k\} P \{N_{n-k} = 0\}, \quad 0 \leq k \leq n$$

Yechim. $B = \{S \hat{I} \ i^n : S_i > 0, i \leq k, \forall S_i \leq S_k, k < i\}$ va $S = (S_1, \dots, S_n)$ deb belgilaylik. Keyin mustaqillik tufayli

$$P \{N_k = k\} P \{N_{n-k} = 0\} = P(S \hat{I} B)$$

$p = 1, 2, \dots, n$ almashtirish orqali biz o'rnatdik.

$$S \hat{I} B = (S_i \hat{I} B_{i=0}^n \ S_i \hat{I} B = x_p(1) + \dots + x_p(i)$$

bizda mavjud.

$$P \{N_n = k\} = \mathring{a}_b P(S \hat{I} A_b)$$

bu yerda $A_b = \{S \hat{I} \ i^n : I(S_i > 0) = b_i, i \leq n\}$, va simmetriyalash. $n - k$ nol va k birliklardan tashkil topgan b barcha vektorlari bo'yicha amalga oshiriladi. ⁵E'tibor bering, agar $S \hat{I} A_b$ bo'lsa, u holda $S \hat{I} B$, bunda

$$p_b(i) = \begin{cases} \mathring{a}_b b_j, & j \in 1 \\ k + i - \mathring{a}_b b_j, & b_i = 1 \\ \mathring{a}_b b_j, & b_i = 0 \end{cases}$$

demak, x_1, \dots, x_N simmetrik taqsimlanganligini hisobga olib, hosil qilamiz.

$$\mathring{a}_b P(S \hat{I} A_b) = \mathring{a}_b P(S \hat{I} A_b, S \hat{I} B) = \mathring{a}_b P(S \hat{I}^{-1} A; S \hat{I} B)$$

Oxirgi yig'indi $P(S \hat{I} B)$ ga teng ekanligini ko'rsatish qoladi. Bu quyidagi holatdan kelib chiqadi: $S \hat{I} B$, har bir kelib chiqishi $S \hat{I}^{-1} A_b$ shartini qanoatlantiruvchi b birlik k noyob ikkilik vektorlarga mos keladi. b ni rekursiv tarzda quraylik. Bu yerda qaraymiz

$$a = (I(S_1 > 0), \dots, I(S_n > 0))$$

$S \hat{I} B$ dan a vektori kamida k ni o'z ichiga oladi. Agar a da aniq k birliklar bo'lsa, biz $b = a$ deb olamiz. Aks holda $(a_l, a_{l+1}, \dots, a_n) = (1, 0, \dots, 0)$ shartidan l raqamini olamiz. $(b_l, b_{l+1}, \dots, b_n) = (1, 0, \dots, 0)$ deb olamiz. Keyinchalik, kesilgan vektorlarga o'tamiz.

$$b' = (b_1, \dots, b_{l-1})$$

va

$$a' = (I(S_1 > 0), \dots, I(S_{k-1} > 0), I(S_{k+1} > x_k), \dots, I(S_l > x_k))$$

⁵ Вероятность_В_2кн_Кн_1_Ширяев_2007_552с

a' da kamida $k - 1$ birlik. Yuqoridagi kabi fikr yuritib, biz oxirgi komponentlarni aniqlaymiz.
 b' Biz buni aniq va to'liq aniqlamagunimizcha b ni bajaramiz. Tuzilgan vektor b barcha kerakli xususiyatlarini qondiradi.(biz buni tekshirishni o'quvchiga qoldiramiz.

Литература

1. А. Н. Ширяев. Вероятность–1. Вероятность: В 2-х кн. – 4-е изд., переработ. и доп.– М.:МЦНМО, 2007.
2. А. Н. Ширяев. Вероятность–2. Вероятность: В 2-х кн. – 4-е изд., переработ. и доп.– М.:МЦНМО, 2007.
3. Боровков А.А. Теория вероятностей, Москва, «Эдиториал-УРСС», 1999г.
4. Abdushukurov A.A. Ehtimollar nazariyasi. Ma'ruzalar matni. Toshkent: «Universitet», 2000.
5. Azlarov T.A., Abdushukurov A.A. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan Inglizcha-ruscha-o'zbekcha lug'at. Toshkent: «Universitet», 2005.
6. А.В. Прохоров, В.Г. Ушаков, Н.Г. Ушаков. Задачи по теории вероятностей. М. «Наука», 1986.
7. А.М. Зубков, Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков. Сборник задач по теории вероятностей. М. «Наука», 1986.
8. Н. Ш. Крамер. Теория вероятностей и математическая статистика. 2-е издание. Москва, «ЮНИТИ», 2004 г