СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЯД, МНОГОУГОЛЬНИК И ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Олимбоев Тулкин Гайрат угли
Преподаватель кафедры «Математический анализ» Ургенчского государственного университета

Хаитбоев Собиржон Хамзаевич
Преподаватель кафедры «Математический анализ» Ургенчского государственного университета

Аннотация:
Закон распределения дискретной случайной величины может быт представлен рядом распределения, многоугольник распределения, функцией распределения.

Ключевые слова: *многоугольник, функция,* распределения, дискретной

Закон распределения дискретной случайной величины может быт представлен рядом распределения, многоугольник распределения, функцией распределения.

[1]Дискретная случайная величина $X,$ имеющая конечное множество возможных значений x_i с соответствующими им вероятностями $p_i = P(X = x_i)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ может быт задана рядом распределения следующего вида:

Таблица 1

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Для вероятностей $p_i,$ приведенных в таблице 1, должно выполняться условие:

1. [1] А. Н. Ширяев. Вероятность–1. Вероятность: В 2-х кн. – 4-е изд., переработ. и доп.–М.:МЦНМО, 2007.
2. А.В. Прохоров, В.Г. Ушаков, Н.Г. Ушаков. Задачи по теории вероятностей. М. «Наука», 1986.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

(*)

Дискретная случайная величина X, имеюшая бесконечное (счетное) множество возможных значений x_i с соответствующими им вероятностями $p_i = P(X = x_i)$ $(i = 1, 2, ..., n, ...)$ может быт задана рядом распределения следующего вида:

Таблица 2

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

Для вероятностей p_i, приведенных в таблице 2, должно выполняться условия: ряд

$$p_1 + p_2 + ... + p_n + ...$$

сходится и

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Графически распределение дискретной случайной величины X может быт представлено многоугольником распределения. Для пострения многоугольника распределения на плоскости в системе координат xOy строят точки (x_i, p_i) и соединяют их ломаний линией. [2]На рис. 12 представлен многоугольник распределения случайной величины, число возможных значений которой $n = 6$.

Дискретная случайная величина X может быт задана функцией распределения $F(x)$ называемой также интегральной функцией распределения:

Для дискретной случайной величины, заданной рядом распределения [3](табл 1 и 2), значения функции распределения находят по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i,$$

где суммирование вероятностей p_i ведут по всем тем значений i, для которых $x_i < x$.

$$F(x) = P(X < x)$$

1. [2] Н. Ш. Крамер. Теория вероятностей и математическая статистика. 2-е издание. Москва, “ЮНИТИ”, 2004 г.

[3] 1. Боровков А.А. Теория вероятностей, Москва, «Эдиториал-УРСС», 1999г

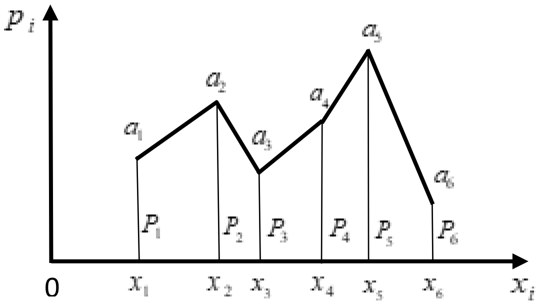

Рис. 12

[4]Вероятность того, что случайная величина X примет значение $x \in [\alpha, \beta)$, выражается через функцию распределения ормулой

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

1. Участник телевизионной игры за правильный ответ на каждый заданный ему вопрос получает пять баллов. Найти ряд распределения случайной величины $X -$ числа баллов, которое может получить участник телевизионной игры за правильный ответ на один вопрос, если имеются два варианта ответов на вопрос и этот участник будет отвечать наугад.

Решение. Рассматриваемая случайная величина X_B результате испытания может принять одно из следующих двух возможных значений: $x_1 = 0;\ x_2 = 5.$ Сумма вероятностей этих значений равна единице. Так как ответ будет дан наугад, то оба возможные значения величины X равновероятны; поэтому вероятность каждого из них равна 0,5.

Случайная величина X имеет следующих ряд распределения

$$x_i: \ 0 \quad 5$$

$$p_i: 0.5 \ 0.5$$

2. Найти ряд распределения случайной величины $X -$ числа выпадений 6-и очков при одним бросании игральний кости.

Решение. Случайная величина $X -$ числа выпадений 6-и очков при одним бросании игральний кости. В результате испытания может принять одно из следующих двух возможных значений: $x_1 = 0;\ x_2 = 1.$

События $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_6 -$ выпадание, соответственно, 1-го, 2-х, 6-и очков при одним бросании интегралний хости являются равновероятными. Сумма вероятностей этих значений равна единице, поэтому

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_6) = 1/6.$$

[4] 2. А. Н. Ширяев. Вероятность–1. Вероятность: В 2-х кн. – 4-е изд., переработ. и доп.–М.:МЦНМО, 2007.

Сведовательно, $p_2 = P(X = 1) = 1/6$. Событие $\overline{A}_2$ – невыпадение 6-ти очков при одном бросании игральной кости противоположно событию A_2 – вероятность $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 1/6 = 5/6.$

Вероятность $p_1 = P(X = 0) = P(\overline{A}_2) = 5/6$

Случайная величина X имеет следующих ряд распределения:

$x_i: \ 0 \quad 1$

$p_i: 5/6 \ 1.6$

3. Игра составлят в набрасывании колец на колышки. Игрок получает четыре колца в бросает по одному из этих колец до первого поподания на колышек. Вероятность поподания при каждом бросании равна 0,1. Найти ряд распределения случайной величины с-числа неизрасходаванных игроком колец.

Решение. Игра состоящая в набрасывании четырех колец на колышек, представляет собой осуществление независимых испытаний, в каждом из которых может появиться или не появиться событие A – попадание кольца на колышек. Вероятность поподания при одном бросании равна $p = 0{,}1;$ вероятность непоподания при одном бросании равна $p = 1 - q = 0{,}9.$

Распологая четырьмя кольцами, игрок может набросить кольцо на колышек или при первом, или при втором, или при третьем, или при четвертом бросании, или же не набросить на колышек ни одного кольца. Возможные значения x_i случайной величины X – числа неизрасходаванных игроком колец будут следующими: 3, 2, 1, 0. Пронумеруем x_i в порядке их возрастания: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3.$

Значение $x_1 = 0$ величина X примет тогда, когда произойдет одно из двух несовместных событий; первое из них–на колышек попало четвертое кольцо, второе событие–кольцо, брошенное четвертым, не попало на колышек. Вероятность события, состаящего в том, что X примет значение $x_1 = 0$, найдем, воспользовавшись теоремой умножения вероятностей несовместных событий:

$$p_1 = P(X = 0) = q^3 p + q^4 = 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 + 0{,}9^4 = 0{,}729$$

Значение $x_2 = 1$ величина X примет тогда, когда игрок израсходует три кольца, т.е. совместо произойдут события: два брошенных кольца не попали, а третье кольцо попало на колышек.

Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение $x_2 = 1$ найдем по теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$p_2 = P(X = 1) = q^2 p = 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}081.$$

На основании рассуждения, аналогичного предыдущему, найдем

$$p_3 = P(X=2) = pq = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09.$$

Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение $x_4 = 3,$ равна $p = 0,1$, так как у игрока останется 3 кольца в том случае, если он попадет на колышек при бросании первого кольца. Итех,

$$p_4 = P(X=3) = 0,1.$$

Сложив найденные вероятности, получим:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,729 + 0,081 + 0,09 + 0,1.$$

Свойство закона распределения о сумме вероятностей возможных значений случайной величины, отраженное формулой (24), выполняется.

Случайная величина X имеет следующих ряд распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,729	0,081	0,090	0,100

4. Изделения испытывают на прочность при работе в перегрузочных режимах. Вероятност для каждого изделия пройти испытание равна 5/6 и не зависит от исходов испытаний других изделий. Испытания заканчиваются сразу же после того, как появится первое изделение, не выдержавшее

Проверку на прочность. Найти ряд распределения случайной величины $X -$ числа производимых испытаний.

Решение. Вероятност для каждого изделия пройти испытание равна $p = 5/6;$ вероятност того, что изделие не пройдет испытание, равна $q = 1 - p = 1/6.$ Испытания заканчиваются на $k -$м изделии $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$ если первые $k-1$ изделий пройдет испытания, а $k -$е изделие не выдержит испытания.

Случайная величина X- число проводимых испытаний, ее возможные значения: $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k,\ \ldots$ (Теоретически число испытаний может быт бесконечно болшим). Вероятности возможных значений величины X найдем по теореме умножения вероятностей независимых событи:

$$P(X=r) = \frac{C_k^r \cdot C_{N-k}^{l-r}}{C_N^l}$$

Рассматриваемая случайная величина X имеет следующий ряд распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	$24/91$	$20/91$	$45/91$	$2/91$

Особенность рассматриваемой случайной величины X состоит в том, что теоретически последовательность ее возможных значений является неогрониченной. Число производимых испитаний можит быть безконечно большим, однако вероятность того, что это произойдет, стремится к нулю:

$$\lim_{k\to\infty} P(X=k) = \lim_{k\to\infty} \frac{5^{k-1}}{6^k} = 0.$$

Убедимся в том, что полученная последовательность вероятностей p_i характеризует закон распределения X т. е. что $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$

Найдем

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \frac{1}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{5^2}{6^3} + \ldots + \frac{5^{k-1}}{6^k} + \ldots = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{6} + \frac{5^2}{6^2} + \ldots + \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} + \ldots\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первых член который $b_1 = 1,$ знаменатель $q = \frac{5}{6}.$

Этот ряд сходится, его сумма $S = \frac{b_1}{1-q} = 6$. Таким образом, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \frac{1}{6}\cdot S = \frac{1}{6}\cdot 6 = 1$.

5. На пути туристов, идущих на след из города $M,$ встречаются два препятствия, о туристов, идущих из города $N,$ встречаются одна препятствие. Вероятности переодолеть без задержки каждое из препятствий для туристов из города M и из города N соответственно равны 0,6 и 0,7. Найти ряд распределения случайной величины $Z -$ числа препятствий, преоделенных туристами из этих городов (без указалия, какого из них) до первой задержки у препятствия.

Решение. Рассмотрим случайные величины, характеризующие число препятствий, преодоленных туристами до первой задержки у препятствия: $X -$ число препятствий, преодоленных без задержки туристами из города M; $Y -$ число препятствий, преодоленных без задержки туристами из города N $Z -$ число препятствий, преодоленных без задержки туристами из этих городов, безразлично, из какого: или из города $M,$ или из города $N.$

X и $Y -$ независимые дискретные случайные величины. Случайная величина $Z = X + Y$.

Обозначим события:

$A -$ преодоление без задержки препятствия туристами из города M;

$\overline{A} -$ задержки у препятствия туристов из города M;

B – преодоление без задержки препятствия туристами из города N;

$\overline{B}$ – задержки у препятствия туристов из города N.

По условию $P(A)=0,6$, $P(B)=0,7$; следовательно, $P(\overline{A})=0,4$, $P(\overline{B})=0,3$.

Найдем ряд распределения случайных величин X и Y.

Случайная величина X в результате испытания может принять одно из следующих трех возможных значений: $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2$. Определеним вероятности этих значений.

Вероятность того, что $x_1=0$, равна

$$p(x_1)=P(X=0)=P(\overline{A})=0,4.$$

Событие, состоящее в том, что величина X приняла значения $x_2=1$, означает, что туристы из города M преодолели без задержки первое препятствие, а второе–нет. Вероятность этого события найдем по теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$p(x_2)=P(X=1)=P(A)\cdot P(\overline{A})=0,6\cdot 0,4=0,24.$$

Событие, состоящее в том, что величина X приняла значения $x_3=2$, означает, что туристы из города M преодолели без задержки и первое, и второе препятствие. Вероятность этого события найдем по теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$p(x_3)=P(X=2)=P(A)\cdot P(A)=0,6^2=0,36.$$

Составим ряд распределения случайной величины X:

x_i	0	1	2
$p(x_i)$	0,40	0,24	0,36

Контроль: 0,40 +0,24 +0,36 =1.

Случайная величина Y в результате испытания может принять одно из следующих трех возможных значений: $y_1=0,\ y_2=1$. Вероятности этих значений равны:

$$p(y_1)=P(y=0)=P(\overline{B})=0,3;$$

$$p(y_1)=P(y=1)=P(B)=0,7.$$

Составим ряд распределения случайной величины X:

y_i	0	1
$p(y_i)$	0,3	0,7

Получим ряд распределения случайной величины $Z=X+Y$. Найдем все возможных значения $Z: z_{ij}=x_i+y_j\ (i=1;2;3;j=1;2)$. Для этого поступим следующим образом.

1) Значения $x_1 = 0$ сложим со всеми возможными значениями y_j, т. е. найдем суммы: $x_1 + y_1 = 0 + 0 = 0$ и $x_1 + y_2 = 0 + 1 = 1$.

2) Значение $x_2 = 1$ сложим со всеми возможными значениями y_j, т. е. найдем суммы $x_2 + y_1 = 1 + 0 = 1;\ x_2 + y_2 = 1 + 1 = 2.$

3) Значение $x_3 = 2$ сложим со всеми возможными значениями, т. е. найдем суммы: $x_2 + y_1 = 2 + 0 = 2;\ x_2 + y_2 = 2 + 1 = 3.$

Значение $z_{11} = 0 = 0 + 0$ получается в результате совместного наступления двух независимых событий: появления значения $X = x_1 = 0$ и появления значения $Y = y_1 = 0$. Результат совместного наступления названных событий представляет собой произведения этих событий. Вероятность того, что появится значение найдем по теореме умножения вероятностей двух независимых событий:

$$P(Z = z_{11}) = P(Z = 0) = P(X = 0) \cdot P(Y = 0) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$$

Аналогично найдем вероятности всех остальных возможных значений велечины Z:

$$P(Z = z_{12}) = P(Z = 1) = P(X = 0) \cdot P(Y = 1) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28;$$

$$P(Z = z_{21}) = P(Z = 1) = P(X = 1) \cdot P(Y = 0) = 0,24 \cdot 0,3 = 0,072;$$

$$P(Z = z_{22}) = P(Z = 2) = P(X = 2) \cdot P(Y = 0) = 0,36 \cdot 0,3 = 0,168;$$

$$P(Z = z_{31}) = P(Z = 2) = P(X = 2) \cdot P(Y = 0) = 0,36 \cdot 0,3 = 0,108;$$

$$P(Z = z_{32}) = P(Z = 2) = P(X = 2) \cdot P(Y = 1) = 0,36 \cdot 0,7 = 0,252;$$

Результаты полученного соответствия между возможными значениями Z и их вероятностями представим в виде следующей таблицы:

z_{ij}	(0+0) 0	(0+1) 1	(1+0) 1	(1+1) 2	(2+2) 2	(2+1) 3
p_{ij}	0,120	0,280	0,072	0,168	0,108	0,252

Эта таблица является промежуточной, так как каждое из возможных значений $Z = 1$ и $Z = 2$ встречается в ней более, чем по одному разу. Значение $Z = 1$ получается или в результате появления суммы 0+1 с вероятность 0,280, или же в результате появления суммы 1+0 с вероятностью 0,072; поэтому вероятность того что случайное величина Z примет значения $Z = 1$ безразлично каким из этих двух способов найдем по теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(Z = 1) = P(X = 0) \cdot P(Y = 1) + P(X = 1) \cdot P(Y = 0) = \\ = 0,280 + 0,072 = 0,352$$

Аналогично по теореме сложения вероятностей несовместных событий найдем:

$$P(Z = 2) = P(X = 1) \cdot P(Y = 1) + P(X = 2) \cdot P(Y = 0) = \\ = 0,168 + 0,108 = 0,276$$

В результате получим следующий ряд распределения случайной величины Z:

$$Z: \begin{array}{ccccc} z_k & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p_k & 0{,}120 & 0{,}352 & 0{,}276 & 0{,}252 \end{array}$$

Контроль: 0,120+0,352+0,256+0,252=1.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найти ряд распределения случайной величины $X-$числа очков**,** выпадающих при одном бросании игральной кости.

2. Фермер содержит 15 коров, 5 из которых дают удов более, чем по 4 500 л молока в год. Случайным образом отобраны 3 принадлежащие этому фермеру короны. Найти закон распределения случайной величины $X-$числа коров, дающих указанные высокие удои среди отобранных.

3. Случайная величина X задана следующим рядом распределения:

$$X: \begin{array}{cccccc} x_i & -3 & -2 & 0 & 2 & 3 \\ p_i & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{array}$$

Найти распределение случайной величины $Y = X^2$.

4. Вероятность изготовления нестандартного изделия при налаженном технологическом процессе постоянно и ровна 0,05. Для проверки качества изготавливаемых изделий отдел технического контроля (ОТК) берет из партии не более четырех изделий. Если будет обнаружено нестандартное изделие, то вся партия будет задержана. Найти ряд распределения случайной величины $X-$числа изделий, проверяемых ОТК из каждой партии.

5. Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

$$X: \begin{array}{ccccc} x_j & -2 & 0 & 3 & 4 \\ p_j & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{array}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить график этой функции.

6. Дискретная случайная X величина задана рядом распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 2, \\ 0,5 & \textit{при} \quad 2 < x \le 4, \\ 0,7 & \textit{при} \quad 4 < x \le 8, \\ 1 & \textit{при} \quad x > 8. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что X примет значение, не меньшее 4 и меньшее 8.

Литература:

1. А. Н. Ширяев. Вероятность–1. Вероятность: В 2-х кн. – 4-е изд., переработ. и доп.– М.:МЦНМО, 2007.
2. А. Н. Ширяев. Вероятность–2. Вероятность: В 2-х кн. – 4-е изд., переработ. и доп.– М.:МЦНМО, 2007.

3. Боровков А.А. Теория вероятностей, Москва, «Эдиториал-УРСС», 1999г.
4. Abdushukurov A.A. Ehtimollar nazariyasi. Ma'ruzalar matni. Toshkent: «Universitet», 2000.
5. Azlarov T.A., Abdushukurov A.A. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan Inglizcha-ruscha-o'zbekcha lug'at. Toshkent: «Universitet», 2005.
6. А.В. Прохоров, В.Г. Ушаков, Н.Г. Ушаков. Задачи по теории вероятностей. М. «Наука», 1986.
7. А.М. Зубков, Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков. Сборник задач по теории вероятностей. М. «Наука», 1986.
8. Н. Ш. Крамер. Теория вероятностей и математическая статистика. 2-е издание. Москва, "ЮНИТИ", 2004 г